

Dane 1.

$$X = \begin{bmatrix} 160 & 80 \\ 180 & 60 \\ 170 & 76 \end{bmatrix}$$

zawierają wzrost (w cm) i masę ciała (w kg) trzech osób.

Dane 2

Macierz Y przedstawia dane ekonomiczne 4 państw Unii Europejskiej i Polski w momencie wprowadzenia euro w 1999 roku. D oznacza dochód narodowy na głowę (w tys \$), I inflację w %, W procent ludności z wykształceniem wyższym

$$\begin{bmatrix} & D & I & W \\ \text{Polska} & 7,5 & 9,2 & 7 \\ \text{Portugalia} & 13,8 & 2,6 & 12 \\ \text{Hiszpania} & 15,1 & 1,4 & 17 \\ \text{Irlandia} & 19,8 & 2,2 & 20 \\ \text{Niemcy} & 20,9 & 0,6 & 23 \end{bmatrix}$$

Dla danych 1 i 2 (zad. 1 - 5)

1. Oblicz środki ciężkości.
2. Oblicz macierze wariancji.
3. Przeprowadź standaryzację X i Y (oznaczmy je $Z(X)$ i $Z(Y)$).
4. Oblicz macierze korelacji. Które ze zmiennych w macierzy dla danych Y są z sobą najbardziej związane? Skomentuj ten związek.
5. Oblicz bezwładność zarówno danych w skali oryginalnej jak i po standaryzacji.
6. Macierze danych Y i Z mają po k i l wierszy, zaś taką samą liczbę kolumn p oraz takie same środki ciężkości. Macierz X jest postaci

$$X = \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Pokaż, że

$$V(X) = \frac{k}{n}V(Y) + \frac{l}{n}V(Z)$$

$$J(X) = \frac{k}{n}J(Y) + \frac{l}{n}J(Z)$$

7. Pokaż, że

$$d^2(X, Y) - d^2(X^0, Y^0) = \|g(X) - g(Y)\|^2$$

8. Macierze X i Y są tych samych rozmiarów i mają te same środki ciężkości. Oblicz

$$d^2(X \oplus a, Y)$$

9. Pokaż, gdy $H = U + b$ (U podprzestrzeń)

$$P_H(X \oplus a) = P_H(X) \oplus P_U(a)$$

$$a \in H \implies P_H(X \oplus a) = P_U(X) \oplus a$$

10. Wykonaj rzut $P_H(X)$ macierzy X (Dane 1) na prostą o kierunku wektora $[1, -1]^T$ i przechodzącą przez wektor $a = [170, 70]^T$. Oblicz $d^2(P_H(X), X)$. Wykonaj rzut $P_K(X)$ macierzy X na prostą o kierunku wektora $[1, -1]^T$ i przechodzącą przez środek ciężkości X . Oblicz $d^2(P_K(X), X)$. Który z modeli: H czy K jest lepszy?

11 Wykonaj rzut macierzy $Z(Y)$ na podprzestrzeń generowaną przez standaryzowaną wersję zmiennych D i W z macierzy Y (Dane 2). Oblicz odległość macierzy $Z(Y)$ i jej rzutu na tą podprzestrzeń. Jak możesz interpretować tę odległość?